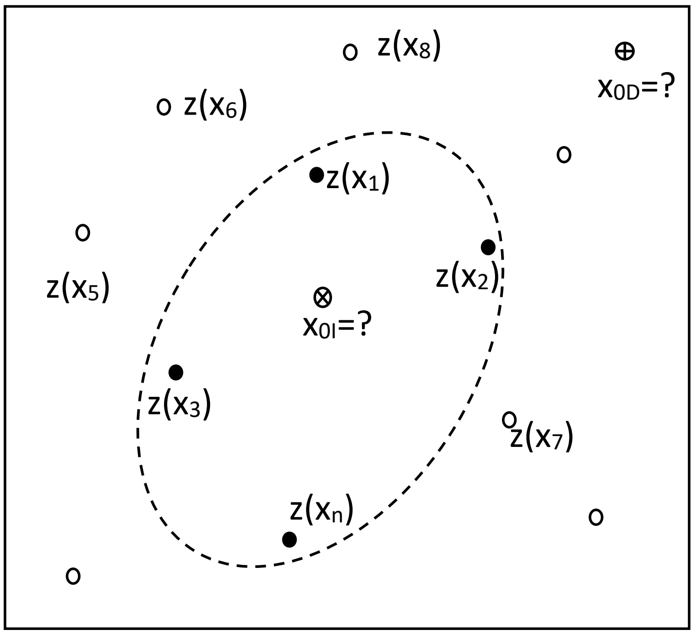
RADYAL BAZLI FONKSİYONLARLA İÇ KESTİRİM VE ÖRTÜK YÜZEYLERİN MODELLENMESİ

Kestirim, örneklenmemiş bir noktanın değerinin çevresindeki diğer noktaların bilinen değerlerini kullanarak hesaplanması işlemidir (Şekil 1). Kestirilecek nokta, verilerin yayıldığı alan içinde kalıyorsa bu işleme iç kestirim (interpolation), dışında yer alıyorsa dış kestirim (extrapolation) adı verilir. Kestirim, dar bir alan içindeki sınırlı sayıdaki veriden yapılıyorsa yerel (local) kestirim, alandaki tüm veriler kullanılarak yapılıyorsa tümsel (global) kestirim adını alır.



Şekil 1. Kestirim işlemi. x_{0I}; iç kestirim noktası, x_{0D}; dış kestirim noktası, ●; yerel kestirimde kullanılan noktalar, ●+o; tümsel kestirimde kullanılan noktalar, $z(x_i)$; x_i noktasındaki verinin değeri, ---; yerel komşuluğun sınırları.

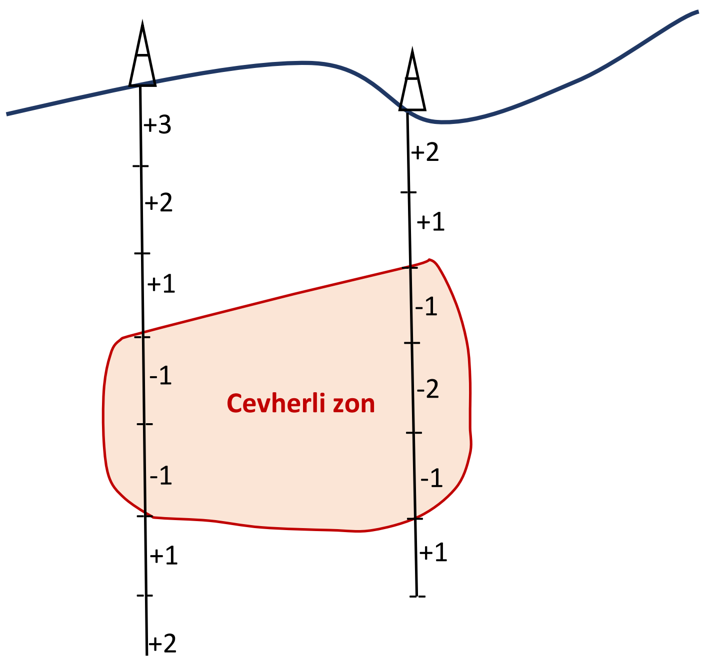
Radyal bazlı fonksiyonlar (RBD), uzaklığa bağlı olarak değer alan izotropik fonksiyonlardır. Bunlarla yapılan kestirim, tümsel iç kestirim sınıfı içine girer. Yüzeylerin örtülü modellemesinde RBF iç kestiricisi, örtük fonksiyon olarak kullanılır ve örtük yüzey, bu fonksiyonun sıfır değerli kümesi olarak tanımlanır. Dolayısıyla RBF ile içkestirim yapmadan önce modellenecek yüzeylere ilişkin verilerin, işaretli uzaklık fonksiyonu (signed distance function) değerlerine dönüştürülmesi gerekir.

İşaretli uzaklık fonksiyonları

Uzaklık fonksiyonları, her veri noktasında tanımlanır. Bunun için x_α veri noktasına en yakın uzaklıkta bir nokta x_β belirlenir. İki lokasyon arasındaki bu uzaklık $(x_\alpha - x_\beta)$, x_α noktasındaki uzaklık fonksiyonu $d(x_\alpha)$'ya karşılık gelir. x_α modellenecek zon içindeyse uzaklığın işareti negatif, zonun dışındaysa pozitiftir. x_α, dokanak yüzeyi üzerindeyse uzaklık fonksiyonunun değeri sıfırdır:

$$d(x_\alpha) = +d(x_\alpha - x_\beta), \qquad x_\alpha \textit{ zon dışında ise}$$
$$d(x_\alpha) = 0, \qquad x_\alpha \textit{ dokanak yüzeyi üzerinde ise}$$
$$d(x_\alpha) = -d(x_\alpha - x_\beta), \qquad x_\alpha \textit{ zon içinde ise}$$

Buna ilişkin bir örnek Şekil 2'de gösterilmiştir.



Şekil 2. Cevherli bir zonu kesen iki sondajda uzaklık fonksiyonu değerleri (Ölçeksiz).

Uzaklık fonksiyonlarının RBF ile iç kestirimi

RBF ile iç kestirim,

$d^*(x) = \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha \varphi(|x - x_\alpha|)$ … Eşitlik (1)

kullanılarak yapılır (Chiles ve Delfiner, 2012). Eşitlik (1) de $d^*(x)$, x noktasındaki uzaklık fonksiyonunun kestirim değerini, b_α; x_α noktasına atanacak ağırlık değerini, $\varphi(|x - x_\alpha|)$; $|x - x_\alpha|$ uzaklığına karşılık gelen RBF değerini göstermektedir. Bu eşitlikte b_α ağırlıkları belirlenmesi gereken katsayılar olup Eşitlik (2) ile verilen sistemin çözümünden elde edilir.

$\sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha \varphi(|x_\beta - x_\alpha|) = d(x_\beta), \quad \beta = 1, \dots, n$ ... Eşitlik (2)

Eşitlik (2) de $d(x_\beta)$, x_β noktalarındaki uzaklık fonksiyonu değerleridir. Eşitlik (2), matris formunda

$$\begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \qquad \text{... Eşitlik (3)}$$

şeklinde yazılabilir. Bu sistemde $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi(|x_\alpha - x_\beta|)$ ve $d_\beta = d(x_\beta)$ dir. Tümsel kestirimde Eşitlik (3), bir kez çözülür. İstenen herhangibir noktada kestirim, belirlenen b_α katsayıları Eşitlik (1) de kullanılarak kolayca yapılabilir. Eğer kestirim değerinin işareti pozitifse nokta modellenecek zonun dışında, negatif ise zonun içindedir. Kestirim değeri sıfır ise nokta tam dokanak yüzeyi üzerindedir. Örtülü yüzey, bu sıfır değeri içeren lokasyonlar birleştirilerek elde edilir.

Radyal Bazlı Fonksiyonlar

Uygulamada kullanılan çok sayıda RBF vardır. $r = |x_\alpha - x_\beta|$; $x_\alpha - x_\beta$ noktaları arasındaki Öklit (Euclidian) uzaklığını ifade ettiğinde Çizelge 1, pratikte sıklıkla kullanılan RBF ları göstermektedir.

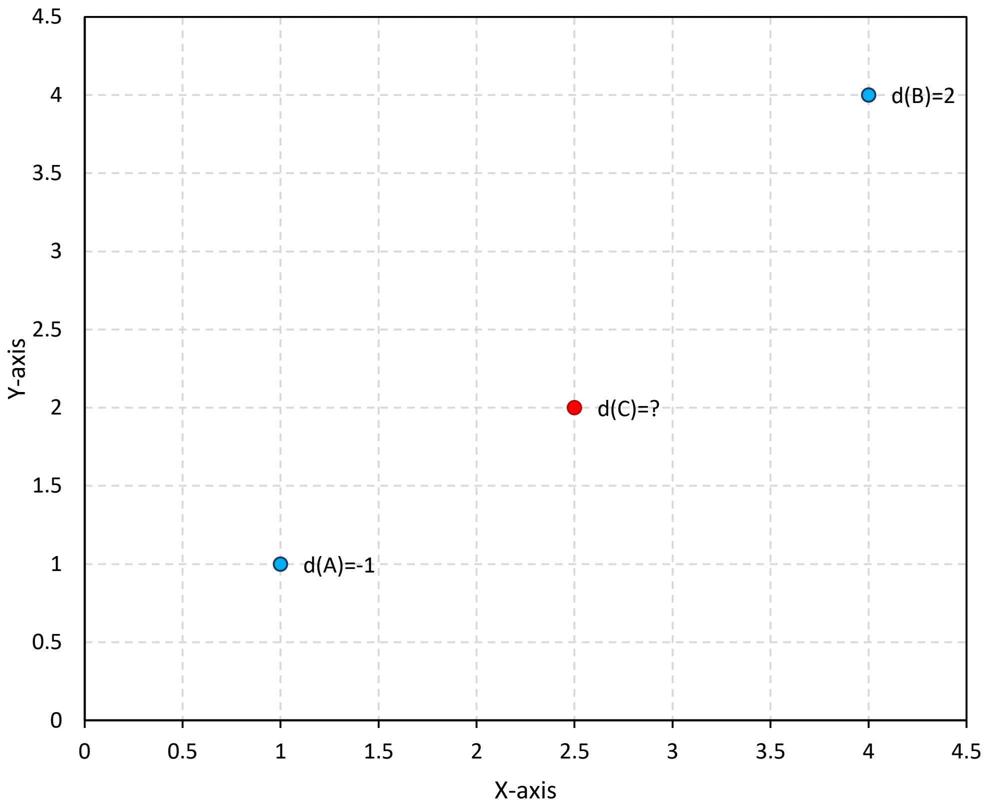
Çizelge 1. Pratikte sıklıkla kullanılan RBF (Zhong ve diğ., 2019)

Fonksiyon adı	Fonksiyonel gösterim
Biharmonik	$\varphi(r) = r$
Triharmonik	$\varphi(r) = r^3$
Çok değişkenli spline	$\varphi(r) = r^{2m+1}$
Gaussian	$\varphi(r) = e^{-cr^3}$
Çoklu karesel	$\varphi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$
Ters çoklu karesel	$\varphi(r) = 1/\sqrt{r^2 + c^2}$
Thin plate spline	$\varphi(r) = r^2 \log(r)$
Çok değişkenli spline	$\varphi(r) = r^{2m} \ln(r)$

RBF seçimi, modellenen yüzeylerin şeklini önemli ölçüde etkiler. Biharmonik RBF lar litolojiler arasındaki dokanak yüzeylerin modellemesine uygunken tenörlerin modellenmesinde thin plate spline ya da küresel variogram benzeri RBF kullanılır.

Örnek 1:

Şekil 2'de verilen örnekleme düzenini gözönüne alalım. A noktasında uzaklık fonksiyonunun değeri d(A)=-1, B noktasındaki uzaklık fonksiyonunun değeri ise d(B)=2 olsun. Ayrıca radyal bazlı fonksiyonun biharmonik yani $\varphi(r) = r$ olduğunu varsayalım. Problem, C ile gösterilen noktanın uzaklık fonksiyonu değerini kestirmek.



Şekil 2. RBF ile uzaklık fonksiyonunun kestirimine ilişkin örnekleme düzeni. A noktasının uzaklık fonksiyonu değeri -1, B noktasının uzaklık fonksyonu değeri ise +2 dir. C noktasındaki uzaklık fonksiyonunun değeri bilinmemektedir.

Bu durumda çözülmesi gereken sistem matris formunda

$$\begin{bmatrix} \varphi(|A-A|) & \varphi(|A-B|) \\ \varphi(|B-A|) & \varphi(|B-B|) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_A \\ b_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(A) \\ d(B) \end{bmatrix} \qquad \text{… Eşitlik (4)}$$

ile ifade edilebilir. Eşitlik (4) ile gösterilen sistemde

$A - A = 0, \quad \varphi(0) = 0$
$A - B = 4.24, \quad \varphi(4.24) = 4.24$
$B - A = 4.24, \quad \varphi(4.24) = 4.24$
$B - B = 0, \quad \varphi(0) = 0$
$d(A) = -1, \quad d(B) = +2$

olup, bu değerler yerine konduğunda

$$\begin{bmatrix} 0 & 4.24 \\ 4.24 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_A \\ b_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$b_A = 0.47$ ve $b_B = -0.26$ olarak hesaplanır.

C noktasındaki uzaklık fonksiyonu değeri ise

$d^*(C) = b_A\phi(|C - A|) + b_B\varphi(|C - B|)$ … Eşitlik (5)

ile kestirilir. Eşitlik (5)'de

$C - A = 3.61, \quad \varphi(3.61) = 3.61$
$B - C = 5.00, \quad \varphi(5.00) = 5.00$

olup, bu değerler Eşitlik (5)'de yerine konduğunda

$$d^*(C) = 0.47 \times 3.61 + (-0.26) \times 5.00 = 0.52$$

elde edilir. Kestirilen değerin işareti pozitif olduğu için C noktasının cevherli zon dışında olduğu söylenebilir.

RBF, thin plate spline formunda [$\varphi(r) = r^2\log(r)$] olsaydı

$A - A = 0, \quad \varphi(0) = 0$
$A - B = 4.24, \quad \varphi(4.24) = 4.24^2\log(4.24) = 11.29$
$B - A = 4.24, \quad \varphi(4.24) = 4.24^2\log(4.24) = 11.29$
$B - B = 0, \quad \varphi(0) = 0$
$C - A = 3.61, \quad \varphi(3.61) = 3.61^2\log(3.61) = 7.24$
$B - C = 5.00, \quad \varphi(5.00) = 5.00^2\log(5.00) = 17.47$

ile $b_A = 0.18$ ve $b_B = -0.09$ olarak hesaplanıp, $d^*(C) = -0.26$ elde edilirdi. Bu durumda kestiriecek nokta cevherli zon içine düşmüş olurdu.

KAYNAKLAR

Chiles, J.P. ve Delfiner, P., 2012, Geostatistics: Modelling Spatial Uncertainty, Second Edition, Wiley, 699p.

Zhong, D.Y., Wang, L.G., Jia, M.T., Bi, L., Zhang, J., 2019, Orebody Modeling from Non-Parallel Cross Sections with Geometry Constraints, Minerals, 9, 229, 2-17.